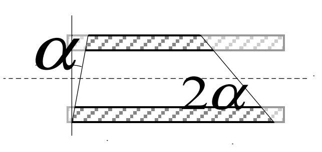
Решения
Задач заключительного тура
Инженерной олимпиады школьников, 11 класс,
2016-2017 учебный год

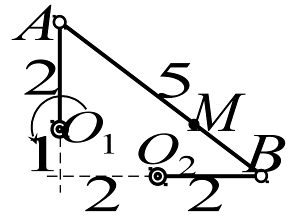
Задания

1. По результатам измерений расхода топлива и совершенной двигателем работы его коэффициент полезного действия (КПД) оказался равным $\eta_1 = 30$ %. Впоследствии выяснилось, что $\delta = 5$ % топлива вытекло через течь в топливном шланге. Какое значение КПД двигателя будет измерено после устранения течи? Ответ обосновать.

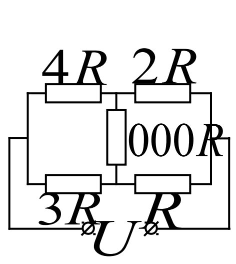


2. Имеется цилиндрическая труба с внутренним радиусом r, внутри которой находится газ с давлением p. Найти силу (величину и направление), действующую со стороны этого газа на кусок трубы с плоскими сечениями, которые образуют углы α и 2α с перпендикулярной трубе плоскостью и осью трубы соответственно (см. рисунок).

3. В сосуд с горячей водой опустили работающий нагреватель мощностью $P = 50$ Вт. В результате температура воды повысилась на $\Delta T = 1^\circ$ С за время $t_1 = 100$ с. Если бы воду не нагревали, то ее температура понизилась бы на ту же величину ΔT за время $t_2 = 200$ с. Какова масса воды? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг К), теплоемкостью сосуда пренебречь.



4. Трехзвенный механизм представляет собой три связанных шарнирно стержня: O_1A, AB и BO_2, прикрепленных к неподвижным осям O_1 и O_2 (см. рисунок). Размеры механизма (в условных единицах) и его расположение в некоторый момент времени показаны на рисунке ($AB = 5$, угол между звеньями AO_1 и BO_2 - прямой). Стержень O_1A вращается вокруг оси O_1 так, что величина скорости точки А постоянна и равна v (направление вращения стержня AO_1 показано стрелкой). Найти в этот момент скорость точки М, делящей стержень АВ в отношении 3:1 (AM:MB=3:1)



5. К электрической цепи, содержащей 5 резисторов с сопротивлениями R, $2R$, $3R$, $4R$ и $1000R$ ($R = 10$ Ом), приложили напряжение напряжения $U = 220$ В. Не пользуясь законами Кирхгофа, а используя большую разность центрального и остальных сопротивлений, оцените ток, который будет течь через резистор с сопротивлением $1000R$. Оцените также точность своей оценки, т.е. оцените величину ошибки, которую вы сделали при такой оценке тока.

6. Оценить число капелек тумана в кубическом метре воздуха, если дальность видимости в таком тумане составляет $L = 50$ метров. Считать, что капли тумана представляют собой маленькие одинаковые шарики воды радиусом $r = 5$ мкм.

Решения

1. Пусть в двигателе было израсходовано такое количество топлива, теплота сгорания которого - Q, и получена работа A. Тогда согласно определению КПД имеем

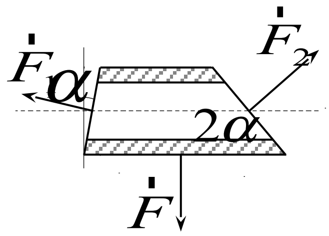
$$\eta_1 = \frac{A}{Q}$$

С другой стороны, часть энергии Q была потеряна, и до двигателя доходила только энергия $(1-\delta)Q$, из которой он и получал работу A. А это значит, что настоящий КПД двигателя есть

$$\eta = \frac{A}{(1-\delta)Q} = \frac{\eta_1}{1-\delta} = 31,6\ \%$$

который и будет измеряться после устранения течи.

2. Основная идея решения задачи заключается в том, что если бы мы закрыли основания участка трубы плоскими поверхностями, сохранив внутри тот же газ, то сила, действующая со стороны газа на участок трубы (с плоскими основаниями), была бы равна нулю. А поскольку силу, действующую со стороны газа на основания вычислить несложно, то можно вычислить и силу, действующую со стороны газа на рассматриваемый участок трубы.



Поскольку площади оснований трубы равны

$$\frac{\pi r^2}{\cos\alpha} \text{ и } \frac{\pi r^2}{\sin 2\alpha},$$

на основания трубы действуют силы

$$F_1 = \frac{p\pi r^2}{\cos\alpha} \text{ и } F_2 = \frac{p\pi r^2}{\sin 2\alpha},$$

направленные перпендикулярно основаниям куска трубы (см. рисунок). Следовательно, сила, действующая на кусок трубы без оснований, равна

$$F = F_1 \sin\alpha + F_2 \cos 2\alpha = p\pi r^2 (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha)$$

и направлена в направлении максимальной образующей куска трубы (см. рисунок).

3. Поскольку при выключенном нагревателе вода остывает, необходимо учитывать теплообмен между сосудом и окружением (теплопотери). Причем мощность теплопотерь w можно найти из следующего уравнения

$$wt_2 = cm\Delta T \qquad \Rightarrow \qquad w = \frac{cm\Delta T}{t_2}$$

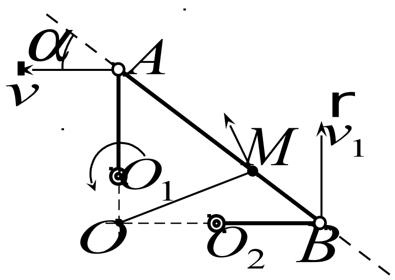
где c - удельная теплоемкость воды, m - ее масса. С учетом теплопотерь процесс нагревания воды выглядит так

$$Pt_1 = cm\Delta T + wt_1$$

Используя найденную выше мощность теплопотерь, находим

$$Pt_1 = cm\Delta T\left(1+\frac{t_1}{t_2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{Pt_1t_2}{c\Delta T\left(t_1+t_2\right)} = 0,79 \text{ кг.}$$

4. С одной стороны, точка В принадлежит стержню O_2B; поэтому ее скорость $\vec{v}_1$ направлена перпендикулярно этому стержню. С другой стороны, точка В принадлежит и стержню АВ. Поэтому проекции скорости точек А и В на стержень АВ равны (это следует из условия неизменности размеров стержня АВ):



$$v\cos\alpha = v_1\sin\alpha$$

Отсюда с учетом того, что $\mathrm{tg}\,\alpha = 3/4$ получаем

$$v_1 = \frac{4v}{3}$$

Поскольку точка О лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям двух точек стержня АВ, в этой точке расположен мгновенный центр вращения этого стержня, а его угловая скорость равна

$$\omega_{AB} = \frac{v}{OA} = \frac{v_1}{OB} \qquad (*)$$

Поэтому для скорости точки М имеем

$$v_M = \omega_{AB}OM$$

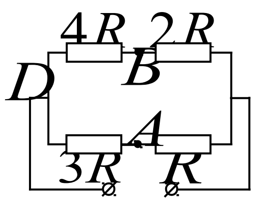
Длину отрезка ОМ найдем из треугольника ОМВ по теореме косинусов

$$OM = \sqrt{OB^2+MB^2-2OB\,MB\cos\alpha} = \frac{7\sqrt{5}}{5} \text{ (у.е.)}$$

В результате из формулы (*) получаем

$$v_M = \frac{7\sqrt{5}v}{15}$$

5. Основная идея решения этой задачи заключается в том, что центральное сопротивление много больше остальных сопротивлений, поэтому ток через него должен быть много меньше токов, текущих через остальные участки. Поэтому в первом приближении будем считать, что ток через сопротивление $1000R$ равен нулю. Тогда сопротивление $1000R$ можно выбросить, и наша цепь становится такой, как показано на рисунке. Далее, по закону Ома для участка цепи находим разность потенциалов между точками А и В $\varphi_A - \varphi_B$ (к которым было подключено сопротивление $1000R$):



$$\varphi_A - \varphi_B = \left(\varphi_A - \varphi_D\right) - \left(\varphi_B - \varphi_D\right) = \frac{U}{4R}\times 3R - \frac{U}{6R}\times 4R = \frac{1}{12}U$$

где φ_D - потенциал точки D (см. рисунок), а затем и ток через сопротивление $1000R$

$$I_0=\frac{\varphi_A-\varphi_B}{1000R}=\frac{U}{1{,}2\times10^4R}=0{,}83\times10^{-4}\frac{U}{R}=1{,}8\times10^{-3}\text{ А} \qquad (*)$$

Оценить ошибку, которую мы сделали при такой оценке тока через сопротивление $1000R$ можно так. При нашей оценке ток в верхнем участке цепи равен

$$I=\frac{U}{6R}, \qquad (**)$$

а если бы мы вычисляли его точно (используя, например, законы Кирхгофа), то мы получили бы значение, отличающееся от (**) на величину тока через сопротивление $1000R$ (*). Поэтому относительная ошибка в величине тока в верхнем участке цепи (а, следовательно, и для разности потенциалов $\varphi_B-\varphi_D$) составляет

$$\frac{\Delta I}{I}\sim\frac{I_0}{I}\sim\frac{\Delta(\varphi_B-\varphi_D)}{\varphi_B-\varphi_D}\sim5\times10^{-4}$$

Аналогичную ошибку мы сделали бы при вычислении тока через нижний участок цепи и разности потенциалов $\varphi_A-\varphi_D$. Поэтому относительная ошибка нашей оценки по порядку величины равна

$$\frac{\Delta I_0}{I_0}=10^{-3}$$

Т.е. составляет одну десятую процента. Абсолютная ошибка - $\Delta I_0=1{,}8\times10^{-6}$ А

6. Поскольку размер капель тумана сравним с длиной волны света, то при рассеянии света на каплях существенными являются волновые эффекты. Поэтому даже после одного рассеяния информация, которую несет свет, теряется. Поэтому дальность видимости 50 метров означает, что на длине 50 м любой луч обязательно рассеется хотя бы один раз на капле тумана. А это значит, что суммарная площадь сечения всех капель, содержащихся внутри цилиндра радиуса L, равна площади его боковой поверхности. Пусть в одном кубическом метре воздуха содержится n капель. Тогда в цилиндре радиуса L и с высотой h содержится

$$N=n\pi L^2h$$

капель, которые имеют суммарное сечение

$$S=N\pi r^2=n\pi^2L^2hr^2$$

Поэтому условие видимости дает

$$n\pi^2L^2hr^2=2\pi Lh$$

Отсюда

$$n=\frac{2}{\pi Lr^2}=5{,}3\times10^8\text{ м}^{-3}$$

Отметим, что можно было провести такие же рассуждения в другой «геометрии» - линейной, сферической. Результат будет отличаться от полученного выше числовым коэффициентом. Все такие решения засчитывались как правильные.